1996,**16**(增刊):57—65

Mathematica Scientia
数学物理学报

抛物型积分微分方程的非协调 Wilson 元方法*

孙澎涛
(中国科学院数学研究所,北京 100080)

摘要 该文首次研究了一类非线性抛物积分微分方程的非协调四边形 Wilson 元方法,提出了它的连续时间 GalerKin 逼近格式,并获得了最优 H' 和 L_2 误差估计.

关键词 非协调,Wilson,非线性元,积分微分方程.

1 引言

考虑下面一类非线性抛物积分微分方程[1]:

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot \{a(u)\nabla u + \int_0^t b(x,t,\tau,u(x,\tau))\nabla u(x,\tau)d\tau\} \\ \qquad\qquad + f(u),(x,t) \in \Omega \times (0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0. \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\Omega \subset R^2$ 为一多边形区域,其边界 $\partial\Omega$ 逐段光滑,$T>0$,并有条件(A):

(i) $\exists\ a_0, a_1 > 0$,使得 $0 < a_0 \leqslant a(u) \leqslant a_1$.

(ii) $a(u)$,$b(x,t,\tau,u(x,\tau)) = b(u(\tau))$ 和 $f(u)$ 均为已知的有界光滑函数,且具有本文论证所需的各阶有界偏导数.

事实上,由下面误差分析知 Galerkin 解将一致收敛于真解 u,因此条件(A)只需在 u 的邻域内成立即可,条件(A)并不苛刻.(1.1)中的时间积分项又称 Volterra 项[1],此类问题在具有记忆功能的材料中的热传导,气体扩散,松散介质中的压力,核反应动力学,粘弹性力学等领域的研究中有着广泛的应用,研究它的数值计算方法无论在理论研究还是实用方面都有着一定的价值.[1]、[2]研究了该类问题的标准 Galerkin 有限元法的收敛性,得到了最优误差估计,但对于它的非协调有限元方法的研究,迄今未曾有人做过分析,本文首次提出对形如(1.1)的非线性抛物积分微分方程应用非协调四边形 Wilson 元方法,前提是在[3]给出的关于网格细分的一个规定条件下,本文通过引进一种不同于[4]的 Volterra 型辅助变分问题,得到了连续时间 Garlerkin 格式的最优 H' 和 L_2 误差估计.

本文在§2 进行一些必要的准备工作,引入预备知识及引理,§3 提出连续时间 Galerkin 格式并做误差分析,得出本文结论.

* 1993 年 11 月 22 日收到原稿,1994 年 7 月 3 日收到修改稿

2 预备知识及引理

记 $W^{s,p}(\Omega)$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，$H^s(\Omega)=W^{s,2}(\Omega)$，和 $H^s(\partial\Omega)$，$S\in R$，是通常意义下 Ω 和 $\partial\Omega$ 上的 Sobolev 空间，相应的范数及其半范数记作：

$$\|\cdot\|_{S,P,G}=\|\cdot\|_{W^{S,P}(G)},\ \|\cdot\|_{S,G}=\|\cdot\|_{H^S(G)},$$
$$\|\cdot\|_{S,\partial G}=\|\cdot\|_{H^S(\partial G)},\ \|\cdot\|_{S,P}=\|\cdot\|_{W^{S,P}(\Omega)}.$$
$$\|\cdot\|_S=\|\cdot\|_{H^s(\Omega)},\ \|\cdot\|=\|\cdot\|_{L_2(\Omega)},$$
$$|\cdot|_{S,G}=|\cdot|_{H^S(G)},\ |\cdot|_S=|\cdot|_{H^S(\Omega)},\ \|\cdot\|_\infty=\|\cdot\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

又令 X 为一 Banach 空间，对 $\varphi:[0,T]\to X$，定义：$\|\varphi\|^2_{L_2(X)}=\int_0^T\|\varphi\|^2_X dt$，$\|\varphi\|_{L_\infty}(X)=\operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant t\leqslant T}\|\varphi(t)\|_X$.

令 $T_h(K)$ 为 Ω 上的一个剖分，K 是剖分单分，h 为单元最大直径，在此剖分下考虑一个非协调有限元空间 $S_h\not\subset H_0^1(\Omega)$，其中检验函数 v 在 $\partial\Omega$ 上的节点处取零值. 记：$\|\cdot\|^2_{S_h}=|\cdot|^2_{1,h}=\sum_K|\cdot|^2_{1,K}$，$\|\varphi\|^2_{L_2(0,t;S_h)}=\int_0^t|\varphi|^2_{1,h}dt$. $\|\varphi\|_{L_2(S_h)}=\|\varphi\|_{L_2(0,T;S_h)}$，$\|\varphi\|_{L_\infty(S_h)}=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\varphi|_{1,h}$.

本文我们限制 S_h 为四边形 Wilson 元非协调空间，检验函数 v 限制在四边形元 $K\in T_h$ 上为 $v|_K$，由[3，(3.1)-(3.3)]定义. 又假设剖分 T_h 满足[3]中正规条件，令 h_K 表示 K 的直径，$h=\max_K h_K$，我们对网格细分引入进一步的假设：单元 K 的对角线中点之间距离 $d_K=O(h_K^2)$，当 $h\to0$ 时对所有 $K\in T_h$ 一致成立.

引入记号：$(\varphi,\psi)=\int_\Omega\varphi\psi dx$，$(\varphi,\psi)_h=\sum_K\int_K\varphi\psi dx$，$A_h(p;\varphi,\psi)=(a(p)\nabla\varphi,\nabla\psi)_h=\sum_K(a(p)\nabla\varphi,\nabla\psi)_K$. $B_h(p(\tau);\varphi(\tau),\psi)=b(p(\tau))\cdot\nabla\varphi(\tau),\nabla\psi)_h=\sum_K(b(p(\tau))\nabla\varphi(\tau),\nabla\psi)_K$，$A(p;\varphi,\psi)=-\int_\Omega\nabla\cdot(a(p)\nabla\varphi)\psi dx$，$B(p(\tau);\varphi(\tau),\psi)=-\int_\Omega\nabla\cdot(b(p(\tau))\nabla\varphi(\tau))\psi dx$，$D(p;\varphi,\psi)=A(p;\varphi,\psi)-A_h(p;\varphi,\psi)$，$E(p(\tau);\varphi(\tau),\psi)=B(p(\tau);\varphi(\tau),\psi)-B_h(p(\tau);\varphi(\tau),\psi)$.

下面引入 Volterra 型辅助变分问题，求 $\tilde u(t):[0,T]\to S_h$，使得

$$A_h(u;\tilde u,v)+\int_0^t B_h(u(\tau);\tilde u(\tau),v)d\tau=A(u;u,v)+\int_0^t B(u(\tau);u(\tau),v)d\tau,\forall\, v\in S_h. \tag{2.1}$$

引理 2.1[3],[4] 假设 $\psi\in H^1(\Omega)$，$v\in S_h$，则

$$|J_h^{(r)}(\psi,v)|=|\sum_K\int_{\partial K}\psi vN_r ds|\leqslant Ch^2\|\psi\|_1|v|_{2,h}. \tag{2.2}$$

这里 $r=1,2$，$n=(N_1,N_2)$ 为沿 K 的边界 ∂K 的单位外法向向量，$|\cdot|^2_{2,h}=\sum_K|\cdot|^2_{2,k}$. 以及：

$$|J_h^{(r)}(\psi,v)|\leqslant Ch\|\psi\|_1|v|_{1,h}.\qquad r=1,2. \tag{2.3}$$

引理 2.2 令 $u\in H^2(\Omega)$ 是(1.1)的解，$\tilde u$ 由(2.1)定义，则对 $t\in[0,T]$，有

$$\|\tilde u-u\|+h|\tilde u-u|_{1,h}\leqslant Ch^2\|u\|_2, \tag{2.4}$$

这里为便于书写,引入记号:$|||u|||_2=\|u\|_2+\int_0^t\|u(\tau)\|_2d\tau$.

证　由(2.1)和条件(A)(i)知,对$\forall\ \chi\in S_h$,有$a_0|\tilde{u}-\chi|_{1,h}^2\leqslant A_h(u;\tilde{u}-\chi,\tilde{u}-\chi)=A_h(u;u-\chi,\tilde{u}-\chi)+D(u;u,\tilde{u}-\chi)+\int_0^t E(u(\tau);u(\tau),\tilde{u}-\chi)d\tau+\int_0^t B_h(u(\tau);(u-\tilde{u})(\tau),\tilde{u}-\chi)d\tau$. 于是

$$
\begin{aligned}
a_0|\tilde{u}-\chi|_{1,h}\leqslant a_1|u-\chi|_{1,h}&+\sup_{\chi\in S_h}\left\{\frac{|D(u;u,\tilde{u}-\chi)|}{|u-\chi|_{1,h}}\right.\\
&\left.+\int_0^t\frac{|E(u(\tau);u(\tau),\tilde{u}-\chi|}{|\tilde{u}-\chi|_{1,h}}d\tau\right\}\\
&+C\int_0^t(|\tilde{u}-\chi|_{1,h}+|u-\chi|_{1,h})d\tau.
\end{aligned}
$$

由三角不等式和 Gronwall 不等式便有

$$
\begin{aligned}
|\tilde{u}-u|_{1,h}\leqslant C\left\{\inf_{\chi\in S_h}(|u-\chi|_{1,h}+\int_0^t|u-\chi|_{1,h}d\tau)+\right.\\
\left.+\sup_{\chi\in S_h}\left(\frac{|D(u;u,\chi)|}{|\chi|_{1,h}}+\int_0^t\frac{|E(u(\tau);u(\tau),\chi)|}{|\chi|_{1,h}}d\tau\right)\right\}.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

因为,$-D(u;u,\chi)=A_h(u;u,\chi)-A(u;u,\chi)=\sum_K\int_K a(u)\nabla u\nabla\chi dx+\int_\Omega\nabla\cdot(a(u)\nabla u)\chi dx=\sum_K\int_{\partial K}a(u)\frac{\partial u}{\partial n}\chi ds$. 令$\chi=w_h+z_h$,其中$w_h\in H_0^1(\Omega)$为$\chi$的协调部分.于是有:$D(u;u,\chi)=D(u;u,z_h)$,称之为相容误差泛函,它可由(2.2)中的双线性形式$J_h^{(r)}(r=1,2)$表示,于是由引理2.1可得

$$|D(u;u,\chi)|\leqslant Ch\|u\|_2|\chi|_{1,h}.$$

同理,

$$
\begin{aligned}
-E(u(\tau);u(\tau),\chi)&=\sum_K\int_{\partial K}b(u(\tau))\frac{\partial u}{\partial n}(\tau)\chi ds\\
-E(u(\tau);u(\tau),z_h)&\leqslant Ch\|u(\tau)\|_2|\chi|_{1,h}.
\end{aligned}
$$

因此由(2.5)有 $|\tilde{u}-u|_{1,h}\leqslant C\left\{\inf_{\chi\in S_h}(|u-\chi|_{1,h}+\int_0^t|u-\chi|_{1,h}d\tau)+h|||u|||_2\right\}$. 利用[3,(5.18)]知成立:

$$|\tilde{u}-u|_{1,h}\leqslant Ch|||u|||_2.\tag{2.6}$$

下面证明L_2估计,令$\tilde{u}=w+z$,其中w为$\tilde{u}$的协调部分,z为其非协调部分,由[3,Theorem4]知:

$$|u-w|_{1,h}\leqslant C\{h\|u\|_2+|u-\tilde{u}|_{1,h}\}.\tag{2.7a}$$

又由(2.6)有

$$|z|_{1,h}\leqslant|u-w|_{1,h}+|u-\tilde{u}|_{1,h}\leqslant Ch|||u|||_2.\tag{2.7b}$$

由[3,(5.21)]有,

$$\|z\|\leqslant Ch|z|_{1,h}.\tag{2.7c}$$

(2.7b)和(2.7c)结合便有

$$\|z\|\leqslant Ch^2|||u|||.\tag{2.8}$$

因此欲让(2.4)中L_2估计,只需证明下式成立:

$$\|u-w\|\leqslant Ch^2|||u|||.$$

令$e=u-w$,引入辅助问题,$\forall\ g\in L_2(\Omega)$,求$\varphi$,使得:

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(a(u)\nabla\varphi)=g, & x\in\Omega,\\ \varphi=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{2.9}$$

由偏微分方程理论知，$\varphi\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，且有先验估计：

$$\|\varphi\|_2\leqslant C\|g\|\tag{2.10}$$

令 $P_h\varphi\in S_h$ 为 φ 在 S_h 上的插值函数，其定义可见[3，Theorem3 的证明(ii)]. 分解 $P_h\varphi$ 为：$P_h\varphi=Q_h\varphi+R_h\varphi$，其中 $Q_h\varphi$ 为协调部分，$R_h\varphi$ 为非协调部分，因此易知：

$$D(u;w,Q_h\varphi)=E(u(\tau);w(\tau),Q_h\varphi)=0.$$

又由(2.9)，我们得到

$$\begin{aligned}(e,g)&=A(u;e,\varphi)=A(u;e,\varphi-Q_h\varphi)\\&-A_h(u;z,\varphi-Q_h\varphi)+A_h(u;z,\varphi)-\int_0^t B(u(\tau);e(\tau),Q_h\varphi)d\tau\\&-\int_0^t B_h(u(\tau);z(\tau),\varphi-Q_h\varphi)d\tau\\&-\int_0^t B_h(u(\tau);z(\tau),\varphi)d\tau\leqslant C\{\|e\|_1\|\varphi-Q_h\varphi\|_1\\&+(|z|_{1,h}+\int_0^t|z(\tau)|_{1,h}d\tau)\|\varphi-Q_h\varphi\|_1\}+I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

其中，$I_1=A_h(u;z,\varphi)=\sum\limits_K\left\{\int_{\partial K}a(u)\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}zds-\int_K\nabla\cdot(a(u)\nabla\varphi)zdx\right\}\leqslant Ch^2\|g\|\cdot\|u\|_2$，这里用到引理 2.1，(2.7)，(2.8)和(2.10).

$$\begin{aligned}I_2&=-\int_0^t B(u(\tau);e(\tau),Q_h\varphi)d\tau\\&=\int_0^t(e(\tau),\nabla\cdot(b(u(\tau))\\&\cdot\nabla Q_h\varphi)d\tau\leqslant C\int_0^t\|e(\tau)\|d\tau\|g\|.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_3&=-\int_0^t B_h(u(\tau);z(\tau),\varphi)d\tau=\int_0^t\sum_K\{\int_K\nabla\cdot(b(u(\tau))\nabla\varphi)\\&\cdot z(\tau)dx-\int_{\partial K}b(u(\tau))\frac{\partial\varphi}{\partial n}z(\tau)ds\}d\tau\leqslant Ch^2\|g\|\int_0^t\|u(\tau)\|_2d\tau.\end{aligned}$$

综合得到

$$\|e\|=\sup_{g\in L_2(\Omega)}\frac{|(e,g)|}{\|g\|}\leqslant C\{h^2\|u\|_2+\int_0^t\|e(\tau)\|d\tau\}.$$

由 Gronwall 不等式便得 $\|e\|\leqslant Ch^2\|u\|_2$. 与(2.8)结合立得证(2.4).

引理 2.3 若 $u,u_t,u_{tt}\in H^2(\Omega)$，则成立

$$\|(\tilde u-u)_t\|+h|(\tilde u-u)_t|_{1,h}\leqslant Ch^2\|u\|_{H^1(H^2)},\tag{2.11}$$

$$\|(\tilde u-u)_{tt}\|+h|(\tilde u-u)_{tt}|_{1,h}\leqslant Ch^2\|u\|_{H^2(H^2)},\tag{2.12}$$

这里为书写简洁，引入另一范数记号，定义：

$$\|u\|_{H^r(H^s)}=\sum_{j=0}^r\left\{\|\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\|_s+\int_0^t\|\frac{\partial^j u}{\partial t^j}(\tau)\|_s d\tau\right\},0\leqslant r,s<\infty.$$

证 (i). 令 $u^*\in S_h$，使得对 $t\in[0,T]$，满足

$$\begin{aligned}&A_h(u;u^*-u_t,v)+\int_0^t B_h(u(\tau);(u^*-u_t)(\tau),v)d\tau\\&=D(u;u_t,v)+\int_0^t E(u(\tau);u_t(\tau),v)d\tau,\forall v\in S_h.\end{aligned}\tag{2.13}$$

由 $D(p;\varphi,\psi)$ 和 $E(p(\tau);\varphi(\tau),\psi)$ 的定义及(2.1)易知,(2.1)可等价地改写为

$$A_h(u;\tilde{u}-u,v)+\int_0^t B_h(u(\tau);(\tilde{u}-u)(\tau),v)d\tau$$
$$=D(u;u,v)+\int_0^t E(u(\tau);u(\tau),v)d\tau,\forall\, v\in S_h. \tag{2.14}$$

因此由(2.4)易得:

$$|u^*-u_t|_{1,h}\leqslant Ch\|u_t\|_2. \tag{2.15}$$

对(2.14)求时间微分有,令 $\eta=\tilde{u}-u$,得到

$$A_h(u;\eta_t,v)+A_h^*(u;\eta,v)+B_h(u;\eta,v)+\int_0^t B_h^*(u(\tau);\eta(\tau),v)d\tau$$
$$=D(u;u_t,v)+D^*(u;u,v)+E(u;u,v)+\int_0^t E^*(u(\tau);u(\tau),v)d\tau, \tag{2.16}$$

其中,

$$A_h^*(u;w,v)=\sum_K\int_K(a(u))_t\nabla w\cdot\nabla v dx,$$
$$B_h(u;w,v)=\sum_K\int_K(b(u))_t\nabla w\cdot\nabla v dx,$$
$$B_h^*(u(\tau);w(\tau),v)=\sum_K\int_K(b(u(\tau))_t\nabla w(\tau)\cdot\nabla v dx,$$
$$D^*(u;w,v)=-\int_\Omega\nabla\cdot((a(u))_t\nabla w)v dx-A_h^*(u;w,v)$$
$$=-\sum_K\int_{\partial K}(a(u))_t\frac{\partial w}{\partial n}v ds,$$
$$E^*(u(\tau);w(\tau),v)=-\int_\Omega\nabla\cdot((b(u(\tau)))_t\nabla w(\tau))v dx$$
$$-B_h^*(u(\tau);w(\tau),v)=-\sum_K\int_{\partial K}(b(u(\tau)))_t\frac{\partial w}{\partial n}(\tau)v ds.$$

令 $\xi=\tilde{u}-u^*$,由引理 2.1,(2.13),(2.15)和(2.16)得到

$$a_0|\xi|_{1,h}^2\leqslant A_h(u;\xi,\xi)=-A_h^*(u;\eta,\xi)-B_h(u;\eta,\xi)$$
$$-\int_0^t B_h^*(u(\tau);\eta(\tau),\xi)d\tau+\int_0^t B_h(u(\tau);(u^*-u_t)(\tau),\xi)d\tau$$
$$+D^*(u;u,\xi)+E(u;u,\xi)+\int_0^t E^*(u(\tau);u(\tau),\xi)d\tau$$
$$-\int_0^t E(u(\tau);u_t(\tau),\xi)d\tau$$
$$\leqslant C\{(|\eta|_{1,h}+\int_0^t|\eta(\tau)|_{1,h}d\tau+\int_0^t|(u^*-u_t)(\tau)|_{1,h}d\tau)$$
$$\cdot|\xi|_{1,h}+h(\|u\|_2+\int_0^t(\|u(\tau)\|_2+\|u_t(\tau)\|_2 d\tau)|\xi|_{1,h}\}$$
$$\leqslant Ch\|u\|_{H^1(H^2)}|\xi|_{1,h}.$$

于是,

$$|\xi|_{1,h}\leqslant Ch\|u\|_{H^1(H^2)}. \tag{2.17}$$

由 $|\eta_t|_{1,h}\leqslant|\xi|_{1,h}+|u^*-u_t|_{1,h}$,和(2.15),(2.17)便得到(2.11)中 $|\cdot|_{1,h}$ 模估计.

下面证明 L_2 估计,仍引入辅助问题(2.9),令 $\tilde{u}_t=\tilde{w}+\tilde{z}$,其中 $\tilde{w}$ 是 $\tilde{u}_t$ 的协调部分,$\tilde{z}$ 为其非协调部分,考虑到空间变量 x 与时间变量 t 之间的相对独立性,完全类似[3,Theorem4]仍有 $|u_t-\tilde{w}|_{1,h}\leqslant C\{h\|u_t\|_2+|u_t-\tilde{u}_t|_{1,h}\}$. 由已知结论便有

$$|\tilde{z}|_{1,h} \leqslant |u_t - \tilde{w}|_{1,h} + |u_t - \bar{u}_t|_{1,h} \leqslant Ch\|u\|_{H^1(H^2)} \tag{2.18}$$

由(2.7c)便得到

$$\|\tilde{z}\| \leqslant Ch^2\|u\|_{H^1(H^2)} \tag{2.19}$$

因此欲证 L_2 估计，只需证明

$$\|u_t - \tilde{w}\| \leqslant Ch^2\|u\|_{H^1(H^2)}.$$

由辅助问题(2.9)，利用(2.16)及下面事实：$D(u;u_t-\tilde{w},Q_h\varphi)=D(u;u_t,Q_h\varphi)=D^*(u;u,Q_h\varphi)=E(u;u,Q_h\varphi)=E^*(u(\tau);u(\tau),Q_h\varphi)=0$，得到 $(u_t-\tilde{w},g)=A(u;u_t-\tilde{w},\varphi)=A(u;u_t-\tilde{w},\varphi-Q_h\varphi)-A_h(u;\tilde{z},\varphi-Q_h\varphi)+A_h(u;\tilde{z},\varphi)+A_h^*(u;\eta,Q_h\varphi)+B_h(u;\eta,Q_h\varphi)+\int_0^t B_h^*(u(\tau);\eta(\tau),Q_h\varphi)d\tau \leqslant Ch^2\|u\|_{H^1(H^2)}\|g\|+M_1+M_2+M_3$，其中，$M_1=A_h^*(u;\eta,Q_h\varphi)=\sum_k\int_{\partial k}(a(u))_t\eta\frac{\partial Q_h\varphi}{\partial n}ds-\sum_k\int_k\nabla\cdot((a(u))_t\nabla Q_h\varphi)\eta dx \leqslant C\{\|\eta\|_{-1/2,h}+\|\eta\|\}\|\varphi\|_2 \leqslant C\{h^2\|u\|_2+\|\eta\|_{-1/2,h}\}\|g\|$，这里 $\|\eta\|_{-1/2,h}=\left(\sum_k\|\eta\|^2_{-1/2,\partial k}\right)^{\frac{1}{2}}$。

同理，$M_2=B_h(u;\eta,Q_h\varphi)\leqslant C\{h^2\|u\|_2+\|\eta\|_{-1/2,h}\}\|g\|$。

$M_3=\int_0^t B_h^*(u(\tau);\eta(\tau),Q_h\varphi)d\tau \leqslant C\{h^2\int_0^t\|u(\tau)\|_2 d\tau+\int_0^t\|\eta(\tau)\|_{-1/2,h}d\tau\}\|g\|$.

因此

$$(u_t-\tilde{w},g)\leqslant C\{h^2\|u\|_{H^1(H^2)}+\|\eta\|_{-1/2,h} + \int_0^t\|\eta(\tau)\|_{-1/2,h}d\tau\}\|g\|. \tag{2.20}$$

下面我们来估计 $\|\eta\|_{-1/2,h}$.

令 $\varphi_K\in H^1(K)$ 是下面椭圆问题的解：

$$\int_k a(u)\nabla\varphi_K\cdot\nabla v dx=\int_{\partial K}\gamma_K v ds, \forall\, v\in H^1(K). \tag{2.21}$$

于是 $\gamma_K\in H^{1/2}(\partial K)$ 可以选择适当的值以使得

$$\int_{\partial K}\gamma_K\eta ds=\|\eta\|^2_{-1/2,\partial K}，且\ \|\gamma_K\|_{1/2,\partial K}=\|\eta\|_{-1/2,\partial K}.$$

γ_K 的存在唯一性由 Hahn－Banach 定理保证.

这是因为 $H^{1/2}(\partial K)$ 与 $H^{-1/2}(\partial K)$ 互为对偶关系，由偏微分方程理论知道，若 K 是凸的，则 $\varphi_K\in H^2(K)$，且

$$\|\varphi_K\|_{2,K}\leqslant C\|\gamma_K\|_{1/2,\partial K}\leqslant C\|\eta\|_{-1/2,\partial K}. \tag{2.22}$$

(2.21)中令 $v=\eta$，并对 $K\in T_h$ 求和，有

$$\sum_K\|\eta\|^2_{-1/2,\partial K}=A_h(u;\eta,\varphi-Q_h\varphi)+A_h(u;\eta,Q_h\varphi), \tag{2.23}$$

这里，$\varphi|_K=\varphi_K$，由(2.4)，(2.22)有

$$|A_h(u;\eta,\varphi-Q_h\varphi)|\leqslant C|\eta|_{1,h}|\varphi-Q_h\varphi|_{1,h} \leqslant Ch^2\|u\|_2\|\eta\|_{-1/2,h}.$$

$$A_h(u;\eta,Q_h\varphi)=D(u;u,Q_h\varphi)+\int_0^t E(u(\tau);u(\tau),Q_h\varphi)d\tau = \int_0^t B_h(u(\tau);\eta(\tau),Q_h\varphi)d\tau=N_1+N_2+N_3,$$

其中由 $Q_h\varphi\in H_0^1(\Omega)\cap S_h$，知 $N_1=N_2=0$. 与估计 M_3 方法相同，可得

$$N_3\leqslant C\{h^2\int_0^t\|u(\tau)\|_2 d\tau+\int_0^t\|\eta(\tau)\|_{-1/2,h}d\tau\}\|\eta\|_{-1/2,h}.$$

综合得到 $\|\eta\|_{-1/2,h}\leqslant C\{h^2\|u\|_2+\int_0^t\|\eta(\tau)\|_{-1/2,h}d\tau\}$，又由 Gronwall 不等式便有

$$\|\eta\|_{-1/2,h}\leqslant Ch^2\|u\|_2. \tag{2.24}$$

将(2.24)代入(2.20)便得到

$$\|u_t-\widetilde{w}\|\leqslant Ch^2\|u\|_{H^1(H^2)}.$$

与(2.19)结合立得(2.11)中 L_2 估计.

(ii)　对(2.12)的证明方法完全类似(2.11)，从略. ∎

引理 2.4　若 $u\in H^2(\Omega)$，则成立

$$\|\tilde{u}-u\|_{-1/2,h}\leqslant Ch^2\|u\|_2, \tag{2.25}$$

$$\|(\tilde{u}-u)_t\|_{-1/2,h}\leqslant Ch^2\|u\|_{H^1(H^2)}. \tag{2.26}$$

证　(2.25)的证明可见引理 2.3 证明中的(2.24)，(2.26)的证明完全类似(2.24)可得. ∎

引理 2.5　若 $u,u_t\in H^2(\Omega)\cap\dot{W}^{1,\infty}(\Omega)$，则$\exists$ $C=C(u)>0$，使得

$$\|\tilde{u}\|_{L\infty(L\infty)}+\|\tilde{u}_t\|_{L\infty(L\infty)}+\|\nabla\tilde{u}\|_{L\infty(L\infty)}+\|\nabla\tilde{u}_t\|_{L\infty(L\infty)}\leqslant C, \tag{2.27}$$

其中，对 $\varphi\in S_h$，定义 $\|\varphi\|_{L\infty(L\infty)}=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\max\limits_{K}\|\varphi\|_{L_\infty(K)}$.

证　由三角不等式和逆估计有

$$\begin{aligned}\|\nabla\tilde{u}\|_\infty&\leqslant\|\nabla(\tilde{u}-P_hu)\|_\infty+\|\nabla(P_hu-u)\|_\infty+\|\nabla u\|_\infty\\&\leqslant Ch^{-1}(|\tilde{u}-u|_{1,h}+|u-P_hu|_{1,h})+\|\nabla(P_hu-u)\|_\infty+\|\nabla u\|_\infty\\&\leqslant C(\|u\|_2+\|\nabla u\|_\infty)+\|\nabla(P_hu-u)\|_\infty.\end{aligned} \tag{2.28}$$

我们利用分解：$P_hu=Q_hu+R_hu$，其中 Q_hu 是 P_hu 的协调部分，R_hu 为其非协调部分. 因此，$\|\nabla(P_hu-u)\|_\infty\leqslant\|\nabla(u-Q_hu)\|_\infty+\|\nabla R_hu\|_\infty\leqslant\|\nabla(u-Q_hu)\|_\infty+Ch^{-1}(|P_hu-u|_{1,h}+|u-Q_hu|_1)\leqslant C(\|\nabla u\|_\infty+\|u\|_2)$.

上式与(2.28)结合便得到 $\|\nabla\tilde{u}\|_{L\infty(L\infty)}\leqslant C(u)$. 同理亦可证明(2.27)中其它三项有界，从略. ∎

3　连续时间非协调元逼近

定义问题(1.1)的连续时间非协调元逼近格式为，求 $U(t):[0,T]\to S_h$，使得

$$\begin{cases}(U_t,V)+A_h(U;U,V)+\int_0^tB_h(U(\tau);U(\tau),V)d\tau\\\qquad=(f(U),V),\\(U(0),V)=(u_0(x),V),\forall\,V\in S_h.\end{cases} \tag{3.1}$$

不失一般性，我们这里假设(1.1)中的初值 $u_0(x)=0$，则 $\tilde{u}(0)=0$. 下面分析格式(3.1)的误差. 令 $\xi=U-\tilde{u}$，$\eta=\tilde{u}-u$，由(1.1)，(3.1)和(2.1)得到

$$\begin{aligned}&(\xi_t,V)+A_h(U;\xi,V)=-(\eta_t,V)+((a(u)-a(U))\\&\cdot\nabla\tilde{u},\nabla V)_h-\int_0^tB_h(U(\tau);\xi(\tau),V)d\tau+\int_0^t((b(u(\tau))\\&-b(U(\tau)))\nabla\tilde{u}(\tau),\nabla V)_hd\tau+(f(U)-f(u),V)\\&=\sum_{j=1}^5G_j.\end{aligned} \tag{3.2}$$

取 $V=\xi_t$，逐项估计(3.2)各项，其中用到引理 2.2 和 2.3，以及 ϵ-不等式：$pq\leqslant\epsilon p^2+(q^2/4\epsilon)$，我们得到

$$(\xi_t,\xi_t)+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}A_h(U;\xi,\xi)-\frac{1}{2}(a'(U)U_t\nabla\xi,\nabla\xi)_h$$

$$\geqslant\|\xi_t\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}A_h(U;\xi,\xi)-C(\|\xi_t\|_{L_\infty(L_\infty)}+1)|\xi|_{1,h}^2.$$

$$\sum_{j=1}^{5}G_j\leqslant\{h^4+\|\xi\|^2+\|\xi_t\|^2+\int_0^t(\|\xi(\tau)\|^2+|\xi(\tau)|_{1,h}^2)d\tau\}+\varepsilon|\xi_t|_{1,h}^2.$$

综合上面两式得到

$$\|\xi_t\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}A_h(U;\xi,\xi)\leqslant C(\|\xi_t\|_{L_\infty(L_\infty)}+1)\{h^4+\|\xi\|^2$$
$$+|\xi|_{1,h}^2+\|\xi_t\|^2+\int_0^t(\|\xi(\tau)\|^2+|\xi(\tau)|_{1,h}^2)d\tau\}+\varepsilon|\xi_t|_{1,h}^2. \quad (3.3)$$

对(3.2)求时间微分得到

$$(\xi_{tt},V)+A_h(U;\xi_t,V)=-(\eta_{tt},V)-((a(U))_t\nabla\xi,\nabla V)_h$$
$$+((a(u)-a(U))\nabla\tilde{u}_t,\nabla V)_h+((a(u)-a(U))_t\nabla\tilde{u},\nabla V)_h$$
$$-B_h(U;\xi,V)-\int_0^t((b(U(\tau)))_t\nabla\xi(\tau),\nabla V)_h d\tau+((b(u)$$
$$-b(U))\nabla\tilde{u},\nabla V)_h+\int_0^t((b(u(\tau))-b(U(\tau)))_t\nabla\tilde{u}(\tau),\nabla V)_h d\tau$$
$$+((f(U)-f(u))_t,V)=\sum_{j=1}^{9}H_j. \quad (3.4)$$

取 $V=\xi_t$. (3.4)左端有估计

$$(\xi_{tt},\xi_t)+A_h(U;\xi_t,\xi_t)\geqslant\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\xi_t\|^2+a_0|\xi_t|_{1,h}^2.$$

H_1—H_9 各项皆是平凡的估计,类似上面 G_1—G_5 的估计有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\xi_t\|^2+a_0|\xi_t|_{1,h}^2\leqslant C(\|\xi_t\|_{L_\infty(L_\infty)}+1)\{h^4+\|\xi\|^2$$
$$+|\xi|_{1,h}^2+\|\xi_t\|^2+\int_0^t(\|\xi(\tau)\|^2+|\xi(\tau)|_{1,h}^2+\|\xi_t(\tau)\|^2)d\tau\}$$
$$+\varepsilon|\xi_t|_{1,h}^2. \quad (3.5)$$

(3.5)与(3.3)相加,适当选取 ε 充分小,得

$$\frac{d}{dt}(\|\xi_t\|^2+A_h(U;\xi,\xi))+|\xi_t|_{1,h}^2$$
$$\leqslant C(\|\xi_t\|_{L_\infty(L_\infty)}+1)\{h^4+\|\xi\|^2+|\xi|_{1,h}^2+\|\xi_t\|^2+\int_0^t(\|\xi(\tau)\|^2$$
$$+|\xi(\tau)^2_{1,h}+\|\xi_t(\tau)\|^2d\tau\}. \quad (3.6)$$

对(3.6)求时间积分,并注意到

$$\|\xi\|^2=\int_\Omega(\int_0^t\xi_t dt)^2dx\leqslant T\int_0^t\|\xi_t\|^2dt,$$

且做归纳假定:存在正常数 C^*,使得

$$\|\xi_t\|_{L_\infty(L_\infty)}\leqslant C^*. \quad (3.7)$$

则有

$$\|\xi_t\|^2+|\xi|_{1,h}^2+\int_0^t|\xi_t|_{1,h}^2dt\leqslant C(C^*+1)\{\|\xi_t(0)\|^2+h^4+\int_0^t(\|\xi_t\|^2+|\xi|_{1,h}^2)dt\}.$$

利用 Gronwall 不等式便得到

$$\|\xi_t\|+|\xi|_{1,h}+\|\xi_t\|_{L_2(0,t;S_h)}\leqslant C\{h^2+\|\xi_t(0)\|. \quad (3.8)$$

令(3.2)在 $t=0$ 取值得

$$(U_t(0)-u_t(0),V)=0,\forall V\in S_h.$$

因此，$\|\xi_t(0)\|^2=(\xi_t(0),\xi_t(0))=-(\eta_t(0),\xi_t(0))\leqslant\|\eta_t(0)\|\cdot\|\xi_t(0)\|$，于是，$\|\xi_t(0)\|\leqslant Ch^2$.

由(3.8)便得

$$\|\xi_t\|_{L_\infty(L_2)}+\|\xi\|_{L_\infty(S_h)}+\|\xi_t\|_{L_2(S_h)}\leqslant Ch^2. \tag{3.9}$$

下面证明当 h 充分小时，(3.7)自然成立. 由逆估计和(3.9)有 $\|\xi_t\|_{L_\infty(L_\infty)}\leqslant Ch^{-1}\|\xi_t\|_{L_\infty(L_2)}\leqslant Ch$，因此若 h 充分小，则必存在正常数 C^*，使(3.7)成立，其证明过程由归纳论证方法易得.

(3.9)与引理 2.2 和 2.3 结合立得定理，其中用到前面公式 $\|\xi\|\leqslant T^{1/2}\|\xi_t\|_{L_2(L-2)}\leqslant T\|\xi_t\|L_\infty(L_2)$

定理　若 $u,u_t\in L_\infty(H^2(\Omega))\cap L_\infty(W^{1,\infty}(\Omega))$，$u_{tt}\in L_2(H^2(\Omega))$，$U$ 是格式(3.1)的 Galerkin 解，则：$\|U-u\|_{L_\infty(L_2)}+\|(U-u)_t\|_{L_\infty(L_2)}+h(\|U-u\|_{L_\infty(S_h)}+\|(U-u)_t\|_{L_2(S_h)})\leqslant Ch^2$.

参 考 文 献

[1] Cannon J R, Lin Y. A prior L_2 error estimates for finite element methods for nonlinear diffusion equations with memory. SIAM J Numer Anal, 1990, **27**: 595－602

[2] Thomee V, Zhang N Y. Error estimates for semidiscrete finite element methods for parabolic integro-differential equations. Math. Comp. 1989, **53**: 121－139

[3] Shi Z C. A convergence condition for the quadrilateral Wilson element. Numer Math, 1984, **44**: 349－361

[4] Chou S H, Li Q. Convergence of the nonconforming Wilson element for a class of monlinear parabolic problems. Math Comp, 1990, **54**: 509－524

[5] Wheeler M F. A prior L_2 error estimates for Galerkin approximation to parabolic partial differential equations. SIAM J Numer Anal, 1973, **10**: 723－759