应 用 数 学
MATHEMATICA APPLICATA
1996, Vol. 9, No. 4: 433～440

双曲积分微分方程的有限元方法及其插值后处理技术应用

孙澎涛
(中国科学院数学研究所 北京 100080)

提要 本文对一类半线性双曲积分微分方程首次应用有限元方法，研究了它的半离散和全离散有限元格式，获得了 $L^\infty(L^2)$ 模意义下的最优误差估计. 又对线性双曲积分微分方程利用插值后处理技术获得了 $L^\infty(L^1)$ 模意义下整体超收敛1阶的高精度，而且计算量并未因此增加. 本文方法可运用到各类发展型微分及积分微分方程上面.

关键词: 双曲积分微分方程; 有限元; 插值后处理; 误差估计
AMS(1991)主题分类: 65L60.

1 引 言

发展型积分微分方程广泛地应用在具有记忆的材料中的热传导，气体扩散，核反应动力学，粘弹性力学，人口动力学等领域. [1～3]讨论了抛物型积分微分方程的有限元方法，而双曲型积分微分方程的有限元研究，迄今未见到. 本文对一类半线性双曲线积分微分方程研究了它的有限元方法，提出了半离散和全离散两种有限元格式，并获得了 $L^\infty(L^2)$ 模最优误差估计. 又研究了插值后处理技术[4]应用到此类问题上面的可行性，获得了经过后处理的有限元解在 $L^\infty(H^1)$ 模意义下整体超收敛1阶的高精度，且计算量并未增加. [4]仅对椭圆型问题得到了整体超收敛1阶的结果，而对于发展型方程插值后处理技术的应用未做讨论. 本文方法可推广到各类发展型微分及积分微分方程上面.

考虑下面问题

$$\begin{cases} u_{tt} = \nabla\cdot(a(x,t)\nabla u) + b(x,t)\cdot\nabla u + c(x,t)u + \int_0^t\{\nabla\cdot(d(x,t,\tau)\nabla u(\tau)) \\ \qquad + e(x,t,\tau)\cdot\nabla u(\tau) + f(x,t,\tau)u(\tau)\}\mathrm{d}\tau + g(u), (x,t)\in\Omega\times(0,T], \\ u_t(x,0) = \varphi(x), u(x,0) = \psi(x), x\in\Omega, \\ u(x,t) = 0, \quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T], \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，$\Omega\subset R^n$ 为有界区域，其边界 $\partial\Omega$ 逐段光滑，$b=(b_1,\cdots,b_n)$，$e=(e_1,\cdots,e_n)$ 为向量函数，并有条件(A)成立:

(i) $\exists\ a_0, a_1>0$，使得 $0<a_0\leqslant a(x,t)\leqslant a_1$，

收稿日期: 1993-07-04

(ii) $a, b_i, c, d, e_i, f, g(u)$ $(i=1,\cdots,n)$ 均为有界连续函数，且具有1阶有界偏导数.

(iii) $\varphi \in L^2(\Omega)$, $\psi \in H_0^1(\Omega)$.

事实上，由下面误差分析知有限元解 U 一致收敛于真解 u，因此条件(A)只需要求在 u 的某一个邻域内成立即可.

记 $\|\cdot\|_{s,q}$ 表示通常意义下 s 阶 Sobolev 空间 $W^{s,q}(\Omega)$ 的范数，$H^s(\Omega)=W^{s,2}(\Omega)$，$H^s=H^s(\Omega)$，$\|\cdot\|_s=\|\cdot\|_{s,2}$，$0\leqslant s<\infty$，$2\leqslant q\leqslant\infty$. 问题(1.1)对应于下面变分形式：

$$\begin{cases}\langle u_{tt},v\rangle + A(u,v) + \int_0^t D(u(\tau),v)\mathrm{d}\tau = \langle b\cdot\nabla u,v\rangle + \langle cu,v\rangle \\ +\langle\int_0^t\{e\cdot\nabla u(\tau)+fu(\tau)\}\mathrm{d}\tau,v\rangle + \langle g(u),v\rangle, \forall v\in H_0^1(\Omega), \\ \langle u_t(0),v\rangle = \langle\varphi,v\rangle, \langle u(0),v\rangle = \langle\psi,v\rangle,\end{cases} \tag{1.2}$$

其中，$\langle v,w\rangle=\int_\Omega v(x)w(x)\mathrm{d}x$，$A(u,v)=\langle a(x,t)\nabla u,\nabla v\rangle$，$D(u(\tau),v)=\langle d(x,t,\tau)\nabla u(\tau),\nabla v\rangle$，$b=b(x,t)$，$c=c(x,t)$，$e=e(x,t,\tau)$，$f=f(x,t)$.

设 T_h 是 Ω 上的一族拟一致正规剖分，$S_h\subset H_0^1(\Omega)$ 是 T_h 上的有限维子空间，h 为剖分最大直径，S_h 具有逼近性质：对正整数 $k\geqslant1$，成立

$$\inf_{\chi\in S_h}\{\|v-\chi\|_0+h\|v-\chi\|_1\}\leqslant Ch^s\|v\|_s, \quad \forall v\in H^s\cap H_0^1, 1\leqslant s\leqslant k+1. \tag{1.3}$$

这里及下面均用 C 表示与 h 无关，而与 u 的范数及条件(A)中函数的上界有关的所有正常数.

2 半离散有限元方法

引理(1.2)的半离散有限元格式为，求 $U(t):[0,T]\to S_h$，使得

$$\begin{cases}\langle U_{tt},V\rangle + A(U,V) + \int_0^t D(U(\tau),V)\mathrm{d}\tau = \langle b\cdot\nabla U,V\rangle + \langle cU,V\rangle \\ +\langle\int_0^t\{e\cdot\nabla U(\tau)+fU(\tau)\}\mathrm{d}\tau,V\rangle + \langle g(U),V\rangle, \\ \langle U_t(0),V\rangle = \langle\tilde\varphi,V\rangle, \langle U(0),V\rangle = \langle\tilde\psi,V\rangle, \forall V\in S_h.\end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $\tilde\psi,\tilde\varphi$ 为 ψ,φ 的 H^1 投影，定义为

$$\langle a(x,0)\nabla(\psi-\tilde\psi),\nabla v\rangle=0,$$
$$\langle a(x,0)\nabla(\varphi-\tilde\varphi),\nabla v\rangle+\langle a_t(x,0)\nabla(\psi-\tilde\psi),\nabla v\rangle=0, \forall v\in S_h. \tag{2.2}$$

下面引进 u 的非标准 H^1 投影 $\tilde u(t):[0,T]\to S_h$，满足[1,2]：

$$\langle a(x,t)\nabla(u-\tilde u)+\int_0^t d(x,t,\tau)\nabla(u-\tilde u)(\tau)\mathrm{d}\tau,\nabla v\rangle=0, \forall v\in S_h. \tag{2.3}$$

并成立下面引理

引理1[1,2] 若 $u\in W^{2,\infty}(0,T;H^s(\Omega))$，$1\leqslant s\leqslant k+1$ 为正整数，则存在 $C>0$，使得

$$\|u-\tilde u\|_{L^\infty(L^2)}+\|(u-\tilde u)_t\|_{L^\infty(L^2)}+\|(u-\tilde u)_{tt}\|_{L^\infty(L^2)}$$
$$+h\{\|u-\tilde u\|_{L^\infty(H^1)}+\|(u-\tilde u)_t\|_{L^\infty(H^1)}+\|(u-\tilde u)_{tt}\|_{L^\infty(H^1)}\}\leqslant Ch^s; \tag{2.4}$$

又若 $u\in W^{2,\infty}(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))$，则∃ $C=C(u)>0$，使得

$$\|\tilde u\|_{L^\infty(L^\infty)}+\|\tilde u_t\|_{L^\infty(L^\infty)}+\|\tilde u_{tt}\|_{L^\infty(L^\infty)}+\|\nabla\tilde u\|_{L^\infty(L^\infty)}$$
$$+\|\nabla\tilde u_t\|_{L^\infty(L^\infty)}+\|\nabla\tilde u_{tt}\|_{L^\infty(L^\infty)}\leqslant C(u). \tag{2.5}$$

下面分析格式(2.1)的误差估计. 令 $U-u=\xi+\eta$，$\xi=U-\tilde u$，$\eta=\tilde u-u$. 从(2.1)中减去(1.

2)，并利用(2.2)，得

$$\langle \xi_{tt},V\rangle + A(\xi,V) + \int_0^t D(\xi(\tau),V)\mathrm{d}\tau = -\langle \eta_{tt},V\rangle + \langle b\cdot\nabla(U-u),V\rangle + \langle c(U-u),V\rangle$$
$$+\langle \int_0^t \{e\cdot\nabla(U-u)(\tau) + f(U-u)(\tau)\}\mathrm{d}\tau,V\rangle + \langle g(U)-g(u),V\rangle = \sum_{j=1}^5 G_j.$$

取 $V=\xi_t$，两端对 t 从0到 t' 积分得各项估计，其中用到(1.3)，(2.4)，(2.5)及 ε-不等式：$pq\leqslant \varepsilon p^2+\frac{1}{4\varepsilon}q^2$，有

$$\int_0^{t'}\{\langle \xi_{tt},\xi_t\rangle + A(\xi,\xi_t)\}\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2}\|\xi_t\|_0^2 + \frac{a_0}{2}\|\nabla\xi\|_0^2 - C\int_0^{t'}\|\nabla\xi\|_0^2\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^{t'}\int_0^t D(\xi(\tau),\xi_t)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t \geqslant -C\int_0^{t'}\|\nabla\xi\|_0^2\mathrm{d}t - \varepsilon\|\nabla\xi\|_0^2,$$

$$\int_0^{t'} G_2\mathrm{d}t = \int_0^{t'}\{-\langle b(U-u),\nabla\xi_t\rangle - \langle(\nabla\cdot b)(U-u),\xi_t\rangle\}\mathrm{d}t$$
$$= -\langle b(U-u),\nabla\xi\rangle + \int_0^{t'}\{\langle (b(U-u))_t,\nabla\xi\rangle$$
$$+\langle b_t(U-u),\nabla\xi\rangle - \langle(\nabla\cdot b)(U-u),\xi_t\rangle\}\mathrm{d}t$$
$$\leqslant C\left\{h^{2k+2} + \int_0^{t'}(\|\xi_t\|_0^2 + \|\nabla\xi\|_0^2 + \|\xi\|_0^2)\mathrm{d}t\right\} + \varepsilon\|\xi\|_0^2.$$

其中用到公式：$\|\xi\|_0^2 \leqslant C\int_0^{t'}(\|\xi_t\|_0^2 + \|\xi\|_0^2)\mathrm{d}t$. 类似亦可得

$$\int_0^{t'}(G_1+G_3+G_4+G_5)\mathrm{d}t \leqslant C\left\{h^{2k+2} + \int_0^{t'}(\|\xi_t\|_0^2 + \|\xi\|_1^2)\mathrm{d}t\right\} + \varepsilon\|\nabla\xi\|_0^2.$$

综合便得估计：

$$\|\xi_t\|_0^2 + \|\nabla\xi\|_0^2 \leqslant C\left\{h^{2k+2} + \int_0^{t'}(\|\xi_t\|_0^2 + \|\nabla\xi\|_0^2 + \|\xi\|_0^2)\mathrm{d}t\right\} + \varepsilon\|\nabla\xi\|_0^2.$$

适当选取 ε 足够小，并利用 Gronwall 不等式和 Poincaré 不等式，便得

$$\|\xi_t\|_{L^\infty(L^2)} + \|\nabla\xi\|_{L^\infty(L^2)} \leqslant Ch^{k+1}. \tag{2.6}$$

(2.6)与(2.4)结合立得

定理1　设 U 是格式(2.1)的解，u 为(1.1)的真解，$u,u_t\in L^\infty(0,T;H^{k+1}(\Omega))$，$u_{tt}\in L^2(0,T;H^{k+1}(\Omega))$，则有最优误差估计

$$\|U-u\|_{L^\infty(L^2)} + \|(U-u)_t\|_{L^\infty(L^2)}$$
$$+h\{\|\nabla(U-u)\|_{L^\infty(L^2)} + \|\nabla(U-u)_t\|_{L^\infty(L^2)}\} \leqslant Ch^{k+1}.$$

3　全离散有限元方法

将区间 $[0,T]$ 分成 N 等份：$0=t_0<t_1<\cdots<t_N=T$，$t_j=j\Delta t$，$\Delta t=t_{j+1}-t_j$，$t_{j+\frac{1}{2}}=\left(j+\frac{1}{2}\right)\Delta t$，引入记号：

$$U^j = U(x,t_j),\quad U^{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(U^{j+1}+U^j),$$

$$U^{j,\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}(U^{j+1}+2U^j+U^{j-1}) = \frac{1}{2}(U^{j+\frac{1}{2}}+U^{j-\frac{1}{2}}),$$

$$\partial_t U^{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t}(U^{j+1}-U^j),$$

$$\partial_t U^j = \frac{1}{2\Delta t}(U^{j+1} - U^{j-1}) = \frac{1}{\Delta t}(U^{j+\frac{1}{2}} - U^{j-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}(\partial_t U^{j+\frac{1}{2}} + \partial_t U^{j-\frac{1}{2}})$$

$$\partial_{t^2} U^j = \frac{1}{(\Delta t)^2}(U^{j+1} - 2U^j + U^{j-1}) = \frac{1}{\Delta t}(\partial_t U^{j+\frac{1}{2}} - \partial_t U^{j-\frac{1}{2}}).$$

引入数值积分公式[1,2]

$$\int_0^{t_{j+1}} f(t)g(t)\mathrm{d}t = \Delta t \sum_{m=0}^{j} f(t_{m+\frac{1}{2}})g^{m+\frac{1}{2}} + O((\Delta t)^{\frac{5}{2}}). \tag{3.1}$$

定义(1.2)的全离散有限元格式为,求$\{U^j\}_{j=0}^N:[0,T]\to S_h$,使得

$$\langle \partial_{t^2} U^j, V\rangle + \langle a^j \nabla U^{j,\frac{1}{4}}, \nabla V\rangle = -\langle \Delta t \sum_{m=0}^{j} d_{jm} \nabla U^{m+\frac{1}{2}}, \nabla V\rangle + \langle b^j \cdot \nabla U^{j,\frac{1}{4}}, V\rangle + \langle c^j U^{j,\frac{1}{4}}, V\rangle$$

$$+ \langle \Delta t \sum_{m=0}^{j} (e_{jm} \cdot \nabla U^{m+\frac{1}{2}} + f_{jm} U^{m+\frac{1}{2}}), V\rangle + \langle g(U^j), V\rangle, \forall\, V \in S_h, \tag{3.2}$$

其中,(i)$d_{jm} = \frac{1}{4}\{d(x,t_{j+1},t_{m+\frac{1}{2}}) + 2d(x,t_j,t_{m+\frac{1}{2}}) + d(x,t_{j-1},t_{m+\frac{1}{2}})\}$,$e_{jm} = \frac{1}{4}\{e(x,t_{j+1},t_{m+\frac{1}{2}}) + 2e(x,t_j,t_{m+\frac{1}{2}}) + e(x,t_{j-1},t_{m+\frac{1}{2}})\}$,$f_{jm} = \frac{1}{4}\{f(x,t_{j+1},t_{m+\frac{1}{2}}) + 2f(x,t_j,t_{m+\frac{1}{2}}) + f(x,t_{j-1},t_{m+\frac{1}{2}})\}$,$m=0,1,\cdots,j-2$;

$$\begin{aligned} d_{j,j-1} &= \frac{1}{4}\{d(x,t_{j+1},t_{j-\frac{1}{2}}) + 2d(x,t_j,t_{j-\frac{1}{2}})\}, \\ e_{j,j-1} &= \frac{1}{4}\{e(x,t_{j+1},t_{j-\frac{1}{2}}) + 2e(x,t_j,t_{j-\frac{1}{2}})\}, \\ f_{j,j-1} &= \frac{1}{4}\{f(x,t_{j+1},t_{j-\frac{1}{2}}) + 2f(x,t_j,t_{j-\frac{1}{2}})\}; \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$d_{jj} = \frac{1}{4}d(x,t_{j+1},t_{j+\frac{1}{2}}), e_{jj} = \frac{1}{4}e(x,t_{j+1},t_{j+\frac{1}{2}}), f_{jj} = \frac{1}{4}f(x,t_{j+1},t_{j+\frac{1}{2}}).$$

(ii) $U^0 = \tilde{\psi}$,这里$\tilde{\psi}$由(2.2)定义;

(iii) U^1由下式确定:

$$\langle a^1 \nabla U^1 + \int_0^{t_1} d(x,t_1,\tau)\nabla U \mathrm{d}\tau, \nabla V\rangle = \langle a^1 \nabla \varphi^1 + \int_0^{t_1} d(x,t_1,\tau)\nabla \hat{\varphi}\mathrm{d}\tau, \nabla V\rangle, \forall\, V \in S_h, \tag{3.4a}$$

上式为连续时间形式的定义式,离散时间形式的定义为:

$$\langle a^1 \nabla U^1 + \frac{1}{2}\Delta t d(x,t_1,t_{\frac{1}{2}})\nabla(U^1 + \tilde{\psi}), \nabla V\rangle$$

$$= \langle a^1 \nabla \varphi^1 + \frac{1}{2}\Delta t d(x,t_1,t_{\frac{1}{2}})\nabla(\hat{\varphi}^1 + \hat{\varphi}^0), \nabla V\rangle, \forall\, V \in S_h, \tag{3.4b}$$

其中,$\varphi^1 = \psi + \Delta t \varphi + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 u_{tt}(0)$,这里$u_{tt}(0)$可由(1.1)算出;$\hat{\varphi}^1 = \psi + \Delta t \varphi$;$\hat{\varphi}^0 = \psi$;$\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(x,t)$取作时间间隔$[0,t_1]$内$t$的线性函数,它是通过连结两点$\hat{\varphi}^1 = \hat{\varphi}(t_1)$和$\hat{\varphi}^0 = \hat{\varphi}(0)$的值而得到的.

易知,若(1.1)中初值条件给定,则在每一固定的时间步长Δt下,φ^1的值和$\hat{\varphi}(x,t)$的函数表达式便唯一确定下来,由(3.4b)便可确定出U^1的值.下面分析(3.4)的性质,首先有数值积分公式([2]中(2.5)):

$$\int_0^{t_1} \mathrm{d}(x,t_1,\tau)\nabla g(\tau)\mathrm{d}\tau = \Delta t d(x,t_1,t_{\frac{1}{2}})\nabla g^{\frac{1}{2}} + O((\Delta t)^3),$$

由上式和(3.4),(2.3)得

$$\langle a^1\nabla\xi^1+\int_0^{t_1}d(x,t_1,\tau)\nabla\xi\mathrm{d}\tau,\nabla\xi^1\rangle=\langle a^1\nabla(\varphi^1-u^1),\nabla\xi^1\rangle$$

$$+\langle\int_0^{t_1}d(x,t_1,\tau)\nabla(\hat{\varphi}-u)(\tau)\mathrm{d}\tau,\nabla\xi^1\rangle+\langle a^1\nabla(u^1-\tilde{u}^1)+\int_0^{t_1}d(x,t_1,\tau)\nabla(u-\tilde{u})\mathrm{d}\tau,\nabla\xi^1\rangle$$

$$=\langle a^1\nabla(\varphi^1-u^1),\nabla\xi^1\rangle+\frac{1}{2}\Delta t\langle d(x,t_1,t_{\frac{1}{2}})\nabla(\hat{\varphi}^1+\hat{\varphi}^0-u^1-u^0),\nabla\xi^1\rangle$$

$$+\langle O((\Delta t)^3),\nabla\xi^1\rangle,$$

因此

$$\|\nabla\xi^1\|_0\leqslant C\left\{(\Delta t)^3+\int_0^{t_1}\|\nabla\xi\|_0\mathrm{d}\tau\right\}. \tag{3.5}$$

对(3.5)利用 Gronwall 不等式便有结论:

$$\|\nabla\xi^1\|_0\leqslant C(\Delta t)^3,\quad \|\partial_t\xi^{\frac{1}{2}}\|_0\leqslant C(\Delta t)^2. \tag{3.6}$$

令(1.2)在 t_{j+1},t_j,t_{j-1} 时刻分别取值后,相应取权:$\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}$,相加得到

$$\langle u_{tt}^{j,\frac{1}{4}},v\rangle+\langle(a(x,t)\nabla u)^{j,\frac{1}{4}},\nabla v\rangle+\langle\left(\int_0^t d(x,t,\tau)\nabla u\mathrm{d}\tau\right)^{j,\frac{1}{4}},\nabla v\rangle$$

$$=\langle(b\cdot\nabla u)^{j,\frac{1}{4}},v\rangle+\langle(cu)^{j,\frac{1}{4}},v\rangle+\langle\left(\int_0^t(e\cdot\nabla u+fu)(\tau)\mathrm{d}\tau\right)^{j,\frac{1}{4}},v\rangle+\langle g^{j,\frac{1}{4}}(u),v\rangle. \tag{3.7}$$

令 $r^j=\partial_{t^2}u^j-u_{tt}^{j,\frac{1}{4}}$,则

$$\|r^j\|_0^2\leqslant C(\Delta t)^3\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}}\|u_{t^4}\|_0^2\mathrm{d}t. \tag{3.8}$$

下面分析格式(3.2),(3.3),(3.4)的误差估计.从(3.2)中减去(3.7),并利用(2.3)得

$$\langle\partial_{t^2}\xi^j,V\rangle+\langle a^j\nabla\xi^{j,\frac{1}{4}},\nabla V\rangle=-\langle\partial_{t^2}\eta^j,V\rangle-\langle r^j,V\rangle+\langle(a(x,t)\nabla\tilde{u})^{j,\frac{1}{4}}-a^j\nabla\tilde{u}^{j,\frac{1}{4}},\nabla V\rangle$$

$$+\langle\left(\int_0^t d(x,t,\tau)\nabla\tilde{u}\mathrm{d}\tau\right)^{j,\frac{1}{4}}-\Delta t\sum_{m=0}^{j}d_{jm}\nabla U^{m+\frac{1}{2}},\nabla V\rangle+\langle b^j\cdot\nabla U^{j,\frac{1}{4}}-(b\cdot\nabla u)^{j,\frac{1}{4}},V\rangle$$

$$+\langle c^jU^{j,\frac{1}{4}}-(cu)^{j,\frac{1}{4}},V\rangle+\langle\Delta t\sum_{m=0}^{j}(e_{jm}\cdot\nabla U^{m+\frac{1}{2}}+f_{jm}U^{m+\frac{1}{2}})$$

$$-\left(\int_0^t(e\cdot\nabla u+fu)(\tau)\mathrm{d}\tau\right)^{j,\frac{1}{4}},V\rangle+\langle g(U^j)-g^{j,\frac{1}{4}}(u),V\rangle=\sum_{j=1}^{8}H_j. \tag{3.9}$$

取 $V=\partial_t\xi^j$,(3.9)两端同乘$2\Delta t$ 后,对 j 从1到 $N-1$求和,得各项估计为

$$2\Delta t\sum_{j=1}^{N-1}\{\langle\partial_{t^2}\xi^j,\partial_t\xi^j\rangle+\langle a^j\nabla\xi^{j,\frac{1}{4}},\nabla\partial_t\xi^j\rangle\}=\|\partial_t\xi^{N-\frac{1}{2}}\|_0^2-\|\partial_t\xi^{\frac{1}{2}}\|_0^2$$

$$+\langle a^{N-1}\nabla\xi^{N-\frac{1}{2}},\nabla\xi^{N-\frac{1}{2}}\rangle-\langle a^0\nabla\xi^{\frac{1}{2}},\nabla\xi^{\frac{1}{2}}\rangle-\sum_{j=1}^{N-1}\langle(a^j-a^{j-1})\nabla\xi^{j-\frac{1}{2}},\nabla\xi^{j-\frac{1}{2}}\rangle$$

$$\geqslant\|\partial_t\xi^{N-\frac{1}{2}}\|_0^2-\|\partial_t\xi^{\frac{1}{2}}\|_0^2+a_0\|\nabla\xi^{N-\frac{1}{2}}\|_0^2-a_1\|\nabla\xi^{\frac{1}{2}}\|_0^2-C\Delta t\sum_{j=1}^{N-1}\|\nabla\xi^{j-\frac{1}{2}}\|_0^2.$$

$$2\Delta t\sum_{j=1}^{N-1}H_3=2\langle(a(x,t)\nabla\tilde{u})^{N-1,\frac{1}{4}}-a^{N-1}\nabla\tilde{u}^{N-1,\frac{1}{4}},\nabla\xi^{N-\frac{1}{2}}\rangle$$

$$-2\langle(a(x,t)\nabla\tilde{u})^{0,\frac{1}{4}}-a^0\nabla\tilde{u}^{0,\frac{1}{4}},\nabla\xi^{\frac{1}{2}}\rangle-2\Delta t\sum_{j=1}^{N-1}\langle[(a(x,t)\nabla\tilde{u})^{j,\frac{1}{4}}-(a(x,t)\nabla\tilde{u})^{j-1,\frac{1}{4}}]/\Delta t$$

$$-(a^j\nabla\tilde{u}^{j,\frac{1}{4}}-a^{j-1}\nabla\tilde{u}^{j-1,\frac{1}{4}})/\Delta t,\nabla\xi^{j-\frac{1}{2}}\rangle$$

$$\leqslant C\Big\{(\Delta t)^4+\|\nabla\xi^{\frac{1}{2}}\|_0^2+\Delta t\sum_{j=1}^{N-1}\|\nabla\xi^{j-\frac{1}{2}}\|_0^2\Big\}+\varepsilon\|\nabla\xi^{N-\frac{1}{2}}\|_0^2.$$

$$2\Delta t\sum_{j=1}^{N-1}H_4=2\Delta t\sum_{j=1}^{N-1}\Big\{\langle\Big(\int_0^t d(x,t,\tau)\nabla\tilde{u}\mathrm{d}\tau\Big)^{j,\frac{1}{4}}-\Delta t\sum_{m=0}^{j}d_{jm}\nabla\tilde{u}^{m+\frac{1}{2}},\nabla\partial_t\xi^j\rangle$$

$$-\langle\Delta t\sum_{m=0}^{j}d_{jm}\nabla\xi^{m+\frac{1}{2}},\nabla\partial_t\xi^j\rangle\Big\}=K_1+K_2.$$

由(3.1)和(3.3)易知,

$$K_1=2\Delta t\sum_{j=1}^{N-1}\langle O((\Delta t)^{\frac{5}{2}}),\nabla\partial_t\xi^j\rangle\leqslant C\Big\{(\Delta t)^4+\Delta t\sum_{j=1}^{N}\|\nabla\xi^{j-\frac{1}{2}}\|_0^2\Big\},$$

$$K_2=-2\Delta t\Big\{\langle\sum_{m=0}^{N-1}d_{N-1,m}\nabla\xi^{m+\frac{1}{2}},\nabla\xi^{N-\frac{1}{2}}\rangle-\langle d_{00}\nabla\xi^{\frac{1}{2}},\nabla\xi^{\frac{1}{2}}\rangle$$

$$+\sum_{j=1}^{N-1}\Big(\langle\sum_{m=0}^{N-1}(d_{j-1,m}-d_{jm})\nabla\xi^{m+\frac{1}{2}},\nabla\xi^{j-\frac{1}{2}}\rangle-\langle d_{jj}\nabla\xi^{j+\frac{1}{2}},\nabla\xi^{j-\frac{1}{2}}\rangle\Big)\Big\}$$

$$\leqslant C\Big\{\|\nabla\xi^{\frac{1}{2}}\|_0^2+\Delta t\sum_{j=1}^{N}\|\nabla\xi^{j-\frac{1}{2}}\|_0^2\Big\}+\varepsilon\|\nabla\xi^{N-\frac{1}{2}}\|_0^2.$$

$$2\Delta t\sum_{j=1}^{N-1}H_5=2\Delta t\sum_{j=1}^{N-1}\Big\{\langle b^j\cdot\nabla\xi^{j,\frac{1}{4}},\partial_t\xi^j\rangle-\langle b^j\eta^{j,\frac{1}{4}},\nabla\partial_t\xi^j\rangle$$

$$-\langle(\nabla\cdot b^j)\eta^{j,\frac{1}{4}},\partial_t\xi^j\rangle+\langle b^j\cdot\nabla u^{j,\frac{1}{4}}-(b(x,t)\cdot\nabla u)^{j,\frac{1}{4}},\partial_t\xi^j\rangle\Big\}=\sum_{i=1}^{4}M_i,$$

$$M_1=\frac{1}{2}\Delta t\sum_{j=1}^{N-1}\langle b^j\cdot\nabla(\xi^{j+\frac{1}{2}}+\xi^{j-\frac{1}{2}}),\partial_t\xi^{j+\frac{1}{2}}+\partial_t\xi^{j-\frac{1}{2}}\rangle$$

$$\leqslant C\Delta t\sum_{j=1}^{N}(\|\nabla\xi^{j-\frac{1}{2}}\|_0^2+\|\partial_t\xi^{j-\frac{1}{2}}\|_0^2).$$

下面完全类似前面估计方法可得到

$$M_2+M_3+M_4+2\Delta t\sum_{j=1}^{N-1}(H_1+H_2+H_6+H_7+H_8)$$

$$\leqslant C\Big\{h^{2k+2}+(\Delta t)^4+\|\nabla\xi^{\frac{1}{2}}\|_0^2+\|\partial_t\xi^{\frac{1}{2}}\|_0^2+\Delta t\sum_{j=1}^{N-1}(\|\nabla\xi^{j-\frac{1}{2}}\|_0^2+\|\partial_t\xi^{j-\frac{1}{2}}\|_0^2)\Big\}$$

$$+\varepsilon\|\nabla\xi^{N-\frac{1}{2}}\|_0^2.$$

其中用到:$\|\xi^j\|_0\leqslant\Delta t\sum_{m=1}^{j}\|\partial_t\xi^{m-\frac{1}{2}}\|_0$.

综合所有估计,取 ε 适当小,并利用离散型 Gronwall 不等式便得到

$$\sup_{1\leqslant j\leqslant N}(\|\partial_t\xi^{j-\frac{1}{2}}\|_0+\|\nabla\xi^{j-\frac{1}{2}}\|_0)\leqslant C\{h^{k+1}+(\Delta t)^2+\|\nabla\xi^{\frac{1}{2}}\|_0+\|\partial_t\xi^{\frac{1}{2}}\|_0\}.$$

上式与(2.4),(3.6)相结合立得

定理2 设$\{U^j\}_{j=0}^N$是格式(3.2),(3.3),(3.4)的解,$u\in L^\infty(0,T;H^{k+1}(\Omega))\cap L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))$,$u_t,u_{tt}\in L^\infty(0,T;H^{k+1}(\Omega))$,$u_{t^3},u_{t^4}\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$,则成立最优误差估计

$$\sup_{1\leqslant j\leqslant N}\{\|\partial_t(U-u)^{j-\frac{1}{2}}\|_0+\|(U-u)^{j-\frac{1}{2}}\|_0+h\|\nabla(U-u)^{j-\frac{1}{2}}\|_0\}\leqslant C\{h^{k+1}+(\Delta t)^2\}.$$

4 插值后处理技术应用

本节考虑矩形区域 $\Omega\subset R^2$，或者 Ω 为边界相互垂直或平行的规则非凸多边区域．取剖分 T_h 为均匀的矩形元剖分 $T_h(\tau)$，τ 为矩形元，$h=\max\limits_{\tau}(h_\tau,k_\tau)$，此处 h_τ,k_τ 分别为水平和垂直方向单元直径的一半．取 $S_h=\{v\in H_0^1(\Omega):v\in Q^k(\tau)\}$，此处 $Q_k(\tau)=\mathrm{span}\{x^iy^j:0\leqslant i,j\leqslant k\}$．

首先引进[4]中一些定义和结论．设 $p_i,l_j,s_j(1\leqslant i\leqslant 4,1\leqslant j\leqslant 2)$ 分别表示 τ 的4个顶点、平行于 x 轴和 y 轴的两边，于是定义"点—边—元"插值 $i_h^k\in(C\to S_h)$，满足

(i) $i_h^k u(p_i)=u(p_i),1\leqslant i\leqslant 4.$

$$\text{(ii)}\ \int_{l_j}(i_h^k u-u)v\mathrm{d}x=\int_{s_j}(i_h^k u-u)v\mathrm{d}y=0,\forall\, v\in P^{k-2}(l_j,s_j),1\leqslant j\leqslant 2. \tag{4.1}$$

(iii) $\int_\tau(i_h^k u-u)v\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\forall\, v\in Q^{k-2}(\tau).$

其中 $P^{k-2}(l_j,s_j)$ 表示边 l_j,s_j 上的完全 $k-2$ 次多项式集合．

引理2[4]　设 $\alpha(x),\beta(x),\nu(x)$ 均为已知光滑函数，且∃ $\alpha_0>0$，使 $\alpha(x)\geqslant\alpha_0>0$，则对 $v\in S_h$ 有：

$$\left|\int_\Omega\nu(x)(i_h^k u-u)v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant Ch^{k+2}\|\nu\|_{k+1,q}\|v\|_{1,q'}, \tag{4.2a}$$

$$\left|\int_\Omega(\alpha(x)\nabla(i_h^k u-u)\cdot\nabla v+\beta(x)\cdot\nabla(i_h^k u-u)v+\nu(x)(i_h^k u-u)v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|$$
$$\leqslant Ch^{k+2-r}\|u\|_{k+3,q}\|v\|_{2-r,q'},\forall\, v\in S_h,r=0,1. \tag{4.2b}$$

引理3　设 $\alpha(x,t),\beta(x,t),\nu(x,t)$ 均为已知光滑函数，$(x,t)\in\Omega\times[0,T]$，且∃ $\alpha_0>0$，使 $\alpha(x,t)\geqslant\alpha_0$，则成立

$$|\langle\nu(x,t)(i_h^k u_{t^j}-u_{t^j}),v\rangle|=O(h^{k+2})\sum_{l=0}^{j}\|u_{t^l}\|_{k+1,q}\|v\|_{1,q'}, \tag{4.3a}$$

$$|\langle\alpha(x,t)\nabla(i_h^k u_{t^j}-u_{t^j}),\nabla v\rangle+\langle\beta(x,t)\cdot\nabla(i_h^k u_{t^j}-u_{t^j}),v\rangle$$
$$+\langle\nu(x,t)(i_h^k u_{t^j}-u_{t^j}),v\rangle|=O(h^{k+2-r})\sum_{l=0}^{j}\|u_{t^l}\|_{k+3,q}\|v\|_{2-r,q'}, \tag{4.3b}$$

其中，$j=0,1,2,3,r=0,1,v\in S_h$．

[4]还定义了粗网格(剖分直径2h)上 $k+2$ 次高插值算子：I_{2h}^{k+2}，其定义同(4.1)．

本节考虑线性双曲积分微分方程，即将(1.1)中 $g(u)$ 改写为 $g(x,t)$，变分形式及有限元格式中均做同样改写，便有(1.1)′，(1.2)′，(2.1)′和(3.2)′．下面列出主要结论．

定理3　设 U 是格式(2.1)′的解，u 为(1.1)′的真解，$u,u_{tt}\in L^\infty(0,T;H^{k+3}(\Omega))$，$u_t,u_{ttt}\in L^2(0,T;H^{k+3}(\Omega))$，则成立估计：

$$\|I_{2h}^{k+2}U-u\|_{L^\infty(H^1)}+\|(I_{2h}^{k+2}U-u)_t\|_{L^\infty(L^2)}\leqslant Ch^{k+1}.$$

定理4　设 $\{U^j\}_{j=0}^N$ 是格式(3.2)′，(3.3)，(3.4)的解，$u\in L^\infty(0,T;H^{k+3}(\Omega))\cap L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))$，$u_t,u_{tt}\in L^\infty(0,T;H^{k+3}(\Omega))$，$u_{t^3},u_{t^4}\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$，则成立 $\sup\limits_{1\leqslant j\leqslant N}\{\|(I_{2h}^{k+2}U-u)^{j-\frac{1}{2}}\|_1+\|\partial_t(I_{2h}^{k+2}U-u)^{j-\frac{1}{2}}\|_0\}\leqslant C\{h^{k+1}+(\Delta t)^2\}$．

下面只证明定理3，定理4的证明由定理2和定理3易得．令 $\xi=U-i_h^k u$，$\eta=i_h^k u-u$．误差方程为

$$\langle\xi_{tt},V\rangle+\langle a(x,t)\nabla\xi,\nabla V\rangle+\langle\int_0^t d(x,t,\tau)\nabla\xi(\tau)\mathrm{d}\tau,\nabla V\rangle=-\langle\eta_{tt},V\rangle$$

$$-\langle a(x,t)\nabla\eta,\nabla V\rangle-\langle\int_0^t d(x,t,\tau)\nabla\eta(\tau)\mathrm{d}\tau,\nabla V\rangle+\langle b\cdot\nabla\xi,V\rangle+\langle b\cdot\nabla\eta,V\rangle+\langle c\xi,V\rangle$$
$$+\langle c\eta,V\rangle+\langle\int_0^t\{e\cdot\nabla\xi+f\xi\}\mathrm{d}\tau,V\rangle+\langle\int_0^t\{e\cdot\nabla\eta+f\eta\}\mathrm{d}\tau,V\rangle=\sum_{j=1}^{9}R_j. \tag{4.4}$$

取 $V=\xi_t$，估计方法完全类似第2节，其中主要利用引理3来代替引理1进行估计，有：

$$\int_0^{t'}R_1\mathrm{d}t=-\langle\eta_{tt},\xi\rangle+\int_0^{t'}\langle\eta_{ttt},\xi\rangle\mathrm{d}t\leqslant C\left\{h^{2k+4}+\int_0^{t'}\|\xi\|_1^2\mathrm{d}t\right\}+\varepsilon\|\xi\|_1^2,$$
$$\int_0^{t'}\sum_{j=2}^{9}R_j\mathrm{d}t\leqslant C\left\{h^{2k+2}+\int_0^{t'}(\|\xi\|_1^2+\|\xi_t\|_0^2)\mathrm{d}t\right\}+\varepsilon\|\xi\|_1^2.$$

综合所有估计，取 ε 适当小并利用 Gronwall 不等式便得

$$\|\xi_t\|_{L^\infty(L^2)}+\|\xi\|_{L^\infty(H^1)}\leqslant Ch^{k+1}. \tag{4.5}$$

又由插值估计公式，令 $\tilde{\eta}=I_{2h}^{k+2}u-u$，有

$$\|\tilde{\eta}\|_{L^\infty(L^2)}+\|\tilde{\eta}_t\|_{L^\infty(L^2)}+h\{\|\tilde{\eta}\|_{L^\infty(H^1)}+\|\tilde{\eta}_t\|_{L^\infty(H^1)}\leqslant Ch^{k+3}. \tag{4.6}$$

由[4]，$I_{2h}^{k+2}i_h^k=I_{2h}^{k+2}$，因此(4.5)，(4.6)结合得

$$\|I_{2h}^{k+2}U-u\|_1\leqslant\|I_{2h}^{k+2}\xi\|_1+\|\tilde{\eta}\|_1\leqslant C\|\xi\|_1+\|\tilde{\eta}\|_1\leqslant Ch^{k+1}.$$

同理亦有 $\|(I_{2h}^{k+2}U-u)_t\|_{L^\infty(L^2)}\leqslant Ch^{k+1}$. 定理3获证.

参 考 文 献

1 张 铁，林延平. 广义椭圆投影的稳定性及其应用. 高等学校计算数学学报，1990(3)：260～269

2 Cannon J, Lin Y. A prior L^2 error estimates for finite-element methods for nonlinear diffusion equations with memory. SIAM. J. Numer. Anal. 1990, 27：595～602

3 Lin Yanping, SIAM. J. Numer. Anal. 1990, 27：608～616

4 Lin Qun, Yan Ningning, Zhou Aihui. A rectangle test for interpolated finite element. Proceedings of systems Science & Systems Engineering. Great Wall (H. K.) Culture Publish Co., 1991. 217～229

The F. E. M. for Hyperbolic Integrodifferential Equation and the Application of Interpolated Postprocessing Technique

Sun Pengtao

(*Institute of Mathematics, Academia Sinica, Peijing*, 100080)

Abstract

This paper studies the semidiscrete and fully discrete F. E. M. for a type of semilinear hyperbolic integrodifferential equation, and obtains the optimal error estimates in $L^\infty(L^2)$ norm. We also apply the interpolated postprocessing technique to the linear condition, and obtain global super convergence one order in $L^\infty(H^1)$ norm, while the computing quantity is not increased.

Keywords: Hyperbolic integrodifferential equation; Finite element; Interpolated postprocessing; Error estimates

AMS(1991) subject classification: 65L60.